1.2.1 Číselné obory, přirozená čísla

Předpoklady: základní číselné operace

Pedagogická poznámka: Hodina je částečně opakováním některých částí předchozí kapitoly. Snažím se zopakovat i modely operací a zdůvodnění pro některá základní pravidla, která se často berou jako zjevené pravdy ($-\cdot-=+$, nulou nelze dělit, …).

Pedagogická poznámka: Tabulku nepromítám, sestavujeme ji společně na tabuli. Stejně tak nepoužívám počítač u následujících příkladů s významem znaků.

Spolu s tím, jak se vyvíjela matematika, objevovala se potřeba nových typů čísel.

Nejběžnější dnes používané typy čísel

Jméno oboru	Značka	Příklady	Co vyjadřují
Přirozená čísla	$\mathbb{N}$	1; 2; 3; …	Počty věcí, lidí…
Celá čísla	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N}$ + -10; -2; 0;…	Počty a dluhy, nula byla přidána později.
Racionální čísla	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Z} + -\frac{31}{7}; \frac{3}{2}; \frac{112}{51}$…	Všechna čísla, která jde zapsat zlomkem, vyjadřují i části věci.
Reálná čísla	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q} + \sqrt{2}; -\sqrt{15}; \sqrt[3]{4}; \pi$;e	Vzdálenosti, délky úseček….
Komplexní čísla	$\mathbb{C}$	$\mathbb{R} + 2+i$	Jde jimi řešit i kvadratické rovnice se záporným diskriminantem, ulehčují fyzikální výpočty.

Existují i další číselné obory například čísla hyperkomplexní (kvaterniony) $1+2i-3j+4k$, které už nemají takový význam (i když se používají například v počítačové grafice) a na gymnáziích se o nich neučí (přece jen jsou už trošku složitější).

Př. 1: Odhadni význam číselné množiny popsané znakem $\mathbb{N}_0$.

$\mathbb{N}$ - množina přirozených čísel, 0 – nula $\Rightarrow$
$\mathbb{N}_0$ - množina všech přirozených čísel a nula = množina všech celých nezáporných čísel

Př. 2: Popiš následující číselné množiny.
a) $\mathbb{Z}^-$ b) $\mathbb{R}^+$ c) $\mathbb{R}_0^+$

a) $\mathbb{Z}^-$
$\mathbb{Z}$ - celá čísla $\Rightarrow$ $\mathbb{Z}^-$ - množina celých záporných čísel.
b) $\mathbb{R}^+$
$\mathbb{R}$ - reálná čísla $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^+$ - množina kladných reálných čísel.
c) $\mathbb{R}_0^+$

$\mathbb{R}^+$ - množina kladných reálných čísel, 0 – nula $\Rightarrow$ $\mathbb{R}_0^+$ - množina kladných reálných čísel a nula $\Rightarrow$ množina kladných nezáporných čísel.

Samotná čísla nestačí, musíme s nimi také něco umět provést. $\Rightarrow$
Operace s čísly: +; -; *; /

(Matematicky) Zajímavé vlastnosti operací

Uzavřenost (U): Patří výsledek operace do dané množiny?
+ je uzavřená na N (výsledek sčítání dvou přirozených čísel je vždy přirozené číslo).
- uzavřená na N není $5-7=-2$, což není přirozené číslo, - je uzavřená na Z.

Komutativnost (K): Získáme po změně pořadí stejný výsledek?
+ je komutativní: $2+3=3+2$.
- není komutativní: $2-3\neq 3-2$.

Asociativita (A): Je možné změnit rozmístění závorek?
+ je asociativní: $2+(3+4)=(2+3)+4$.
- není asociativní: $2-(3-4)\neq(2-3)-4$.

Distributivnost (D): Je možné roznásobovat závorky?
* je distributivní na +: $5(3+1)=5\cdot 3+5\cdot 1$.

Neutrální prvek (N): Existuje prvek, který při dané operaci nezmění svého partnera?
1 je neutrální prvek pro násobení – libovolné číslo se při vynásobení jedničkou nezmění.

Inverzní prvek ($^{-1}$): Existuje ke každému prvku prvek, který při dané operaci dá jako výsledek neutrální prvek?
Pro 2 je při násobení inverzní prvek $\frac{1}{2}$, protože $2\cdot\frac{1}{2}=1$, 1 je neutrální prvek pro *.

Př. 3: Najdi (pokud existuje) v množině celých čísel neutrální prvek pro operaci sčítání.

Přičtením neutrálního prvku se číslo nezmění $\Rightarrow$ neutrálním prvkem pro operaci sčítání je nula (přičtením nuly se číslo nezmění).

Př. 4: Najdi (pokud existuje) v množině celých čísel inverzní prvek pro operaci sčítání k číslu: a) 4, b) -17 .

Hledáme takové číslo, po jehož přičtení k zadanému číslu získáme nulu.
a) inverzním prvkem k číslu 4 je číslo -4, platí $4+(-4)=0$
´b) inverzním prvkem k číslu -17 je číslo 17, platí: $-17+17=0$.

Využívání vlastností **K**+**A**+**D** usnadňuje počítání.

Přirozená čísla

- počty věcí, lidí, …
Vlastnosti operací u přirozených čísel už jsme probrali.

+ $1+2=3$ U; K; A;
- $4-1=3$
* $2\cdot 3=6$ U; K; A; N(1);
/ $6:2=3$ N(1);

Při vhodném použití K+A+D můžeme počítat zpaměti i na první pohled těžké příklady.

Př. 5: Vypočti zpaměti $12+46+38+54=$.

$12+46+38+54=(12+38)+(46+54)=50+100=150$

Pedagogická poznámka: Následující příklad je možné pojmout jako soutěž (kdo stihne v časovém limitu nejvíce). Poslední příklady již stojí více na odhadu situace než mechanickém uplatnění K+A+D.

Př. 6: Vypočti zpaměti.
a) $25+71+15+99=$ b) $5\cdot 13\cdot 2=$ c) $5\cdot 17\cdot 4\cdot 5=$
d) $15\cdot 3+15\cdot 7=$ e) $594:6=$ f) $788:4=$

a) $25+71+15+99=(25+15)+(71+99)=40+170=210$

b) $5\cdot 13\cdot 2=(5\cdot 2)\cdot 13=10\cdot 13=130$

c) $5\cdot 17\cdot 4\cdot 5=5\cdot 17\cdot 2\cdot 2\cdot 5=(5\cdot 2)\cdot(2\cdot 5)\cdot 17=10\cdot 10\cdot 17=1700$

d) $15\cdot 3+15\cdot 7=15(3+7)=15\cdot 10=150$

e) $594:6=(600-6):6=600:6-6:6=100-1=99$

f) $788:4=(800-12):4=800:4-12:4=200-3=197$

Pedagogická poznámka: Následující příklady jsou převzaty z [16]. Diskuse o bodu b) je velmi zajímavá, většinou pomůže si situaci namodelovat na vzdálenosti 18. a 28. sloupu.

Př. 7: Podél železnice jsou telegrafní sloupy vzdálené od sebe vždy 50 m. Sloupy jsou označeny čísly 1, 2, 3, ...
a) Kolik metrů je od 1. sloupu k 10. sloupu?
b) Kolik metrů je od 28. sloupu po 128. sloup?
c) Kolik metrů je od 1917. sloupu po 1983 sloup?
d) Kolik metrů je od *k*-tého sloupu po *l*-tý sloup?

a) Kolik metrů je od 1. sloupu k 10. sloupu?
Vzdálenost je určená počtem mezer mezi sloupy, mezi 1. a 10. sloupem je $10-1=9$ mezer, které dohromady znamenají vzdálenost $9\cdot 50\,\mathrm{m}=450\,\mathrm{m}$.

b) Kolik metrů je od 28. sloupu po 128. sloup?
Mezi 28. a 128. sloupem je $128-28=100$ mezer, které dohromady znamenají vzdálenost $100\cdot 50\,\mathrm{m}=5000\,\mathrm{m}$.

c) Kolik metrů je od 1917. sloupu po 1983 sloup?

Mezi 1917. a 1983. sloupem je $1983-1917=66$ mezer, které dohromady znamenají vzdálenost $66\cdot 50\,\mathrm{m}=3300\,\mathrm{m}$.

d) Kolik metrů je od *k*-tého sloupu po *l*-tý sloup?
Mezi *k*-tým a *l*-tým sloupem je $k-l$ mezer, které dohromady znamenají vzdálenost $(k-l)\cdot 50\,\mathrm{m}$.

Př. 8: a) Tyče u tyčového značení používaného v Krkonoších jsou od sebe vzdáleny tři metry. Turista prošel kolem devíti sloupů. Kolik metrů urazil?
b) Kolik let uplynulo od roku 1965 do roku 1983?
c) Kolik hodin uplynulo od 1.10. 1983 do 8.10. 1983?

a) Turista prošel kolem devíti sloupů. Kolik metrů urazil?
Devět sloupů $\Rightarrow$ 8 mezer $\Rightarrow$ $8\cdot 3\,\mathrm{m}=24\,\mathrm{m}$.

b) Kolik let uplynulo od roku 1965 do roku 1983?
Mezi začátky obou roků uplynulo $1983-1965=18$ let, od konce roku 1965 do začátku roku 1983 uplynulo 17 let.

c) Kolik hodin uplynulo od 1.10. 1983 do 8.10. 1983?
Mezi začátky obou dnů uplynulo $8-1=7$ dní $\Rightarrow$ $7\cdot 24=168$ hodin, od konce 1.10.1983 do začátku 8.10.1983 uplynulo 6 dní $\Rightarrow$ $6\cdot 24=144$ hodin.

Shrnutí: Číselné obory postupně vznikaly s rostoucími potřebami praktického využití. Všechna námi používaná čísla můžeme modelovat pomocí reálných předmětů.